3年5帯　数学演習　　課題解答および解説（令和2年5月6日まで）

担当　河原　茂樹

$\boxed{1}$ 練習13　次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

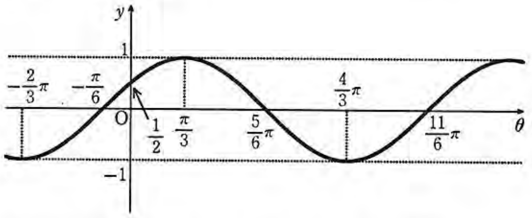
(1)　$y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$　　(2)　$y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

(3)　$y=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

解説

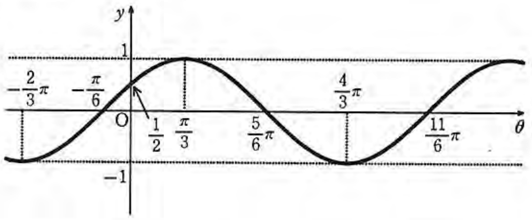
(1)　$y=\cos\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものである。

グラフは[図]，周期は 2π である。



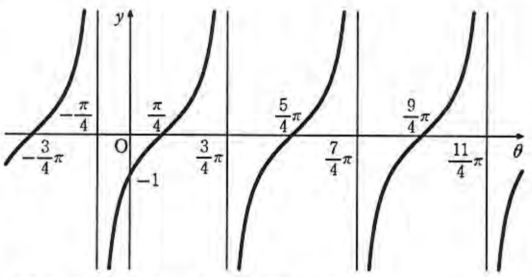
(2)　$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $-\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。

グラフは[図]，周期は 2π である。



(3)　$y=\tan\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものである。

グラフは[図]，周期は π である。



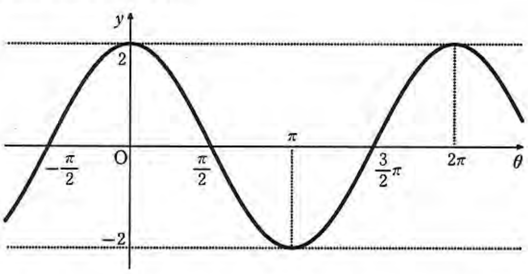
$\boxed{2}$ 練習14　次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=2\cos\theta$　　(2)　$y=\frac{1}{2}\sin\theta$

解説

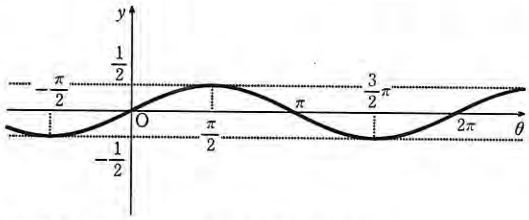
(1)　$y=\cos\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ 2 倍に拡大したものである。

グラフは[図]，周期は 2π である。



(2)　$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。

グラフは[図]，周期は 2π である。



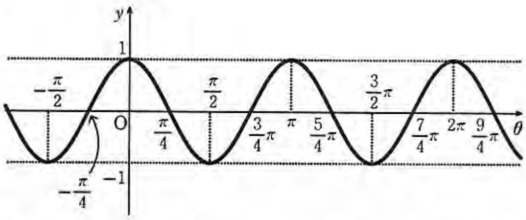
$\boxed{3}$ 練習15　次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=\cos 2\theta$　　(2)　$y=\sin\frac{\theta}{2}$　　(3)　$y=\tan 2\theta$

解説

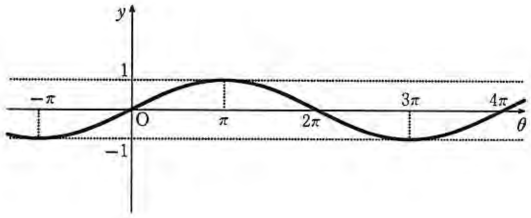
(1)　$y=\cos\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。

グラフは[図]，周期は $2\pi\times\frac{1}{2}=\pi$ である。



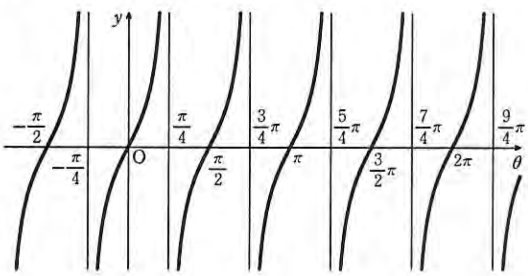
(2)　$y=\sin\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ 2 倍に拡大したものである。

グラフは[図]，周期は $2\pi\times 2=4\pi$ である。



(3)　$y=\tan\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。

グラフは[図]，周期は $\pi\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$ である。



$\boxed{4}$ 練習16　次の値を求めよ。

(1)　$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$　　(2)　$\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$　　(3)　$\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$

解説

(1)　$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(2)　$\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)=\cos\frac{13}{6}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　$\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)=-\tan\frac{9}{4}\pi=-\tan\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

$\boxed{5}$ 練習17　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\sin\theta+1=0$　　(3)　$2\cos\theta+1=0$

解説

(1) 方程式を変形すると　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

下の図のように，単位円と直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の交点を P，Q とすると，動径 OP，OQ が角 θ の動径である。

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，求める θ は

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$$

(2) 下の図のように，単位円と直線 $x=-1$ の交点を P とすると，動径 OP が角 θ の動径である。

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，求める θ は

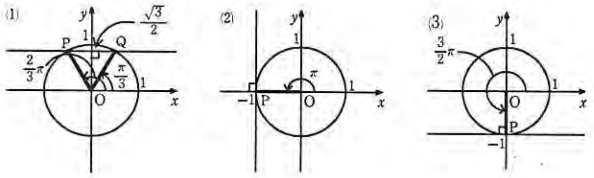
$$\theta=\pi$$

(3 方程式を変形すると　$\sin\theta=-1$

下の図のように，単位円と直線 $y=-1$ の交点を P とすると，動径 OP が角 θ の動径である。

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，求める θ は

$$\theta=\frac{3}{2}\pi$$



6 練習18　次の方程式を解け。

(1) $2\sin\theta=-\sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{2}\sin\theta-1=0$

解説

(1) 方程式を変形すると　$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

下の図のように，単位円と直線 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の交点を P，Q とすると，動径 OP，OQ が角 θ の動径である。

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，求める θ は

$$\theta=\frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

よって，求める方程式の解は

$$\theta=\frac{4}{3}\pi+2n\pi,\ \frac{5}{3}\pi+2n\pi\quad(n\text{ は整数})$$

(2) 方程式を変形すると　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

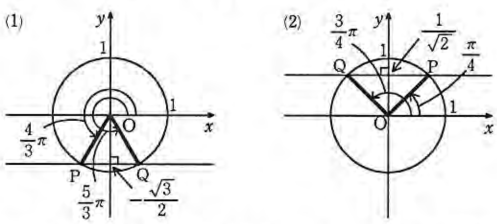
下の図のように，単位円と直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の交点を P，Q とすると，動径 OP，OQ が角 θ の動径である。

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，求める θ は

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

よって，求める方程式の解は

$$\theta=\frac{\pi}{4}+2n\pi,\ \frac{3}{4}\pi+2n\pi\quad(n\text{ は整数})$$

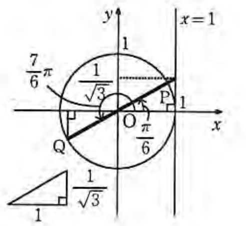


7 練習19　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。また，θ の範囲に制限がないときの解を求めよ。

(1) $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(2) $\tan\theta=-\sqrt{3}$

解説

(1) 右の図のように，単位円と，原点と点 $\mathrm{T}\left(1,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を結ぶ直線の交点を P，Q とすると，動径 OP，OQ が角 θ の動径である。



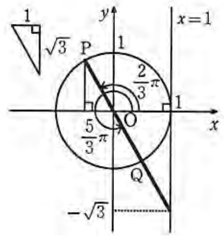
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，求める θ は

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$$

また，θ の範囲に制限がないとき，方程式の解は

$$\theta=\frac{\pi}{6}+n\pi\quad(n\text{ は整数})$$

(2) 右の図のように，単位円と，原点と点 $\mathrm{T}(1,\ -\sqrt{3})$ を結ぶ直線の交点を P，Q とすると，動径 OP，OQ が角 θ の動径である。



$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，求める θ は

$$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

また，θ の範囲に制限がないとき，方程式の解は

$$\theta=\frac{2}{3}\pi+n\pi\quad(n\text{ は整数})$$

8 練習20　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $2\cos^2\theta+5\sin\theta-4=0$　　(2) $2\sin^2\theta+\cos\theta-1=0$

解説

(1) 方程式を変形すると

$$2(1-\sin^2\theta)+5\sin\theta-4=0$$
$$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2=0$$

因数分解すると　$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから

$$2\sin\theta-1=0\quad\text{すなわち}\quad\sin\theta=\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で解くと　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

(2) 方程式を変形すると

$$2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-1=0$$
$$2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$$

因数分解すると　$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)=0$

よって　$2\cos\theta+1=0$　または　$\cos\theta-1=0$

すなわち　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　または　$\cos\theta=1$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ を解くと　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

$\cos\theta=1$ を解くと　$\theta=0$

したがって，求める解は　$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

9 練習21　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$　　(2) $\sin\theta>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解説

(1) $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となる θ は　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，不等式の解は，下の図から　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

(2) $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

よって，不等式の解は，下の図から　$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{3}{4}\pi$