春休みの課題　　（ノートにやり最初の授業に提出）

解説

1．(1)　$2A+B=2(x^2-3x+5)+(2x^2+4x-3)=2x^2-6x+10+2x^2+4x-3$

$=(2x^2+2x^2)+(-6x+4x)+(10-3)=4x^2-2x+7$

(2)　$A-B+2(2A+B)=A-B+4A+2B=5A+B=5(x^2-3x+5)+(2x^2+4x-3)$

$=5x^2-15x+25+2x^2+4x-3$

$=(5x^2+2x^2)+(-15x+4x)+(25-3)=7x^2-11x+22$

解説

2．(1)　$2x-y+1=A$ とおくと

$(x+2y+2)(2x-y+1)=(x+2y+2)A=xA+2yA+2A$

$=x(2x-y+1)+2y(2x-y+1)+2(2x-y+1)$

$=2x^2-xy+x+4xy-2y^2+2y+4x-2y+2$

$=2x^2+3xy-2y^2+5x+2$

(2)　$a-2c=A$ とおくと

$(a+b-2c)(a-b-2c)=(A+b)(A-b)=A^2-b^2=(a-2c)^2-b^2$

$=a^2-4ac+4c^2-b^2=a^2-b^2+4c^2-4ac$

(3)　$x^2+x=A$ とおくと

$(x^2+x-2)(x^2+3+x)=(A-2)(A+3)=A^2+A-6=(x^2+x)^2+(x^2+x)-6$

$=\{(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot x+x^2\}+(x^2+x)-6$

$=(x^4+2x^3+x^2)+(x^2+x)-6=x^4+2x^3+2x^2+x-6$

(4)　$(x+3y)^2(x-3y)^2=\{(x+3y)(x-3y)\}^2=\{x^2-(3y)^2\}^2=(x^2-9y^2)^2$

$=(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot 9y^2+(9y^2)^2=x^4-18x^2y^2+81y^4$

(5)　$(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)=(x^2+4y^2)\{x^2-(2y)^2\}=(x^2+4y^2)(x^2-4y^2)$

$=(x^2)^2-(4y^2)^2=x^4-16y^4$

(6)　$(x-1)(x-4)(x+4)(x+1)=\{(x-1)(x+1)\}\{(x-4)(x+4)\}=(x^2-1)(x^2-16)$

$=(x^2)^2-17x^2+16=x^4-17x^2+16$

解説

3．(1)　$2a^2+2a-12=2(a^2+a-6)=2(a-2)(a+3)$

(2)　$a^3b+2a^2b-8ab=ab(a^2+2a-8)=ab(a-2)(a+4)$

(3)　$x-2=A$ とおくと

$(x-2)^2-3(x-2)-18=A^2-3A-18=(A+3)(A-6)$

$=\{(x-2)+3\}\{(x-2)-6\}=(x+1)(x-8)$

(4)　$x^2-10x+25-9y^2=(x^2-10x+25)-9y^2=(x-5)^2-(3y)^2$

$=\{(x-5)+3y\}\{(x-5)-3y\}=(x+3y-5)(x-3y-5)$

(5)　$a^2+ab+a-2b-6=(a-2)b+(a^2+a-6)=(a-2)b+(a-2)(a+3)$

$=(a-2)\{b+(a+3)\}=(a-2)(a+b+3)$

(6)　$x^2+4xy+3y^2+2x+4y+1$

$=x^2+(4y+2)x+(3y^2+4y+1)$

$=x^2+(4y+2)x+(y+1)(3y+1)$

$=\{x+(y+1)\}\{x+(3y+1)\}$

$=(x+y+1)(x+3y+1)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & & y+1 & \longrightarrow\ y+1 \\ 1 & \times & 3y+1 & \longrightarrow\ 3y+1 \\ \hline 1 & & (y+1)(3y+1) & 4y+2 \end{array}$$

解説

4．(1)　$x=2$ のとき

$|3x-5|+|2x+3|=|3\cdot2-5|+|2\cdot2+3|=|1|+|7|=1+7=8$

(2)　$x=-1$ のとき

$|3x-5|+|2x+3|=|3\cdot(-1)-5|+|2\cdot(-1)+3|=|-8|+|1|=8+1=9$

(3)　$x=-3$ のとき

$|3x-5|+|2x+3|=|3\cdot(-3)-5|+|2\cdot(-3)+3|=|-14|+|-3|=14+3=17$

解説

5．(1)　$\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{2}}-\sqrt{6}=\sqrt{\dfrac{48}{2}}-\sqrt{6}=\sqrt{24}-\sqrt{6}=2\sqrt{6}-\sqrt{6}=\sqrt{6}$

(2)　$\dfrac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}-\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2}-\dfrac{\sqrt{6}}{(\sqrt{3})^2}=\dfrac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3}$

(3)　$\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}+\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{(\sqrt{7})^2-2\times\sqrt{7}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}$

$+\dfrac{(\sqrt{7})^2+2\times\sqrt{7}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{10-2\sqrt{21}}{4}+\dfrac{10+2\sqrt{21}}{4}=\dfrac{20}{4}=5$

別解　$\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{(10-2\sqrt{21})+(10+2\sqrt{21})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{20}{4}=5$

解説

6．(1)　$x+y=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$

(2)　$xy=(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=3^2-(2\sqrt{2})^2=9-8=1$

(3)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\cdot1=36-2=34$

(4)　$x^2y+xy^2=xy(x+y)=1\cdot6=6$

解説

7．(1)　$A\cap B=\{1,\ 3,\ 5\}$

(2)　$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$

(3)　$\overline{A}=\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

(4)　$\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ であるから，(3) より　$\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

別解　ド・モルガンの法則により　$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$

(1) から　$\overline{A\cap B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

よって　$\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

(5)　$\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ であるから，(3) より　$\overline{A}\cap\overline{B}=\{6,\ 8\}$

別解　ド・モルガンの法則により　$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

(2) から　$\overline{A\cup B}=\{6,\ 8\}$

よって　$\overline{A}\cap\overline{B}=\{6,\ 8\}$

(6)　(1) から　$\overline{A\cap B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

別解　ド・モルガンの法則により　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

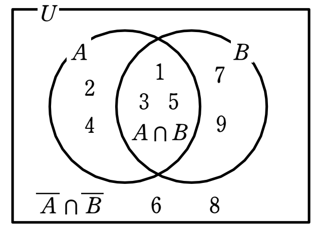
よって，(4) から　$\overline{A\cap B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

(7)　(2) から　$\overline{A\cup B}=\{6,\ 8\}$

別解　ド・モルガンの法則により　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

よって，(5) から　$\overline{A\cup B}=\{6,\ 8\}$

(8)　$\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ であるから　$A\cap\overline{B}=\{2,\ 4\}$



解説

8．(1)　与えられた命題の逆は　「$x^2=1 \Longrightarrow x=1$」

与えられた命題は真で，その逆は偽 (反例：$x=-1$) である。

(2)　与えられた命題の逆は　「$x^2>0 \Longrightarrow x\geqq0$」

与えられた命題は偽 (反例：$x=0$) で，その逆も偽 (反例：$x=-1$) である。

(3)　与えられた命題の逆は　「$x\fallingdotseq1 \Longrightarrow x^2+2x\fallingdotseq3$」

与えられた命題は真で，その逆は偽 (反例：$x=-3$) である。

(4)　与えられた命題の逆は　「n は 10 の倍数 $\Longrightarrow$ n は 5 の倍数」

与えられた命題は偽 (反例：$n=5$) で，その逆は真である。

解説

9．(1)　命題「$x=6 \Longrightarrow x^2=36$」は真であり，その逆「$x^2=36 \Longrightarrow x=6$」は偽 (反例：$x=-6$) であるから，$x=6$ は $x^2=36$ であるための十分条件である。

(2)　命題「$2x+5=3 \Longrightarrow x=-1$」は真であり，その逆「$x=-1 \Longrightarrow 2x+5=3$」も真であるから，$2x+5=3$ は $x=-1$ であるための必要十分条件である。

(3)　命題「$x^2>4 \Longrightarrow x>2$」は偽 (反例：$x=-3$) であり，その逆「$x>2 \Longrightarrow x^2>4$」は真であるから，$x^2>4$ は $x>2$ であるための必要条件である。

解説

10．(1)　命題「$x^2+y^2\fallingdotseq0 \Longrightarrow x\fallingdotseq0$ または $y\fallingdotseq0$」の対偶は

「$x=0$ かつ $y=0 \Longrightarrow x^2+y^2=0$」

この命題は真であるから，与えられた命題も真である。

(2)　命題「$x+y<0 \Longrightarrow x<0$ かつ $y<0$」の対偶は

「$x\geqq0$ または $y\geqq0 \Longrightarrow x+y\geqq0$」

この命題は偽 (反例：$x=1$，$y=-2$) であるから，与えられた命題も偽である。

(3)　命題「n は 15 の倍数でない $\Longrightarrow$ n は 5 の倍数でない」の対偶は

「n は 5 の倍数 $\Longrightarrow$ n は 15 の倍数」

この命題は偽 (反例：$n=10$) であるから，与えられた命題も偽である。

解説

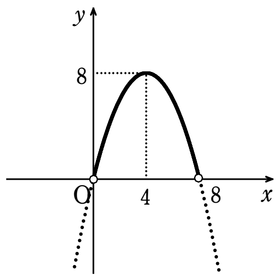
11. 三角形の底辺の長さを x cm とすると，高さは $(8-x)$ cm である。ここで，底辺の長さと高さは正の数であるから　$x>0$，$8-x>0$

すなわち　$0<x<8$ ……①

三角形の面積を $y\ \mathrm{cm}^2$ とすると

$$y=\frac{1}{2}x(8-x)=-\frac{1}{2}x^2+4x=-\frac{1}{2}(x^2-8x)$$

$$=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8$$



よって，① の範囲において，y は $x=4$ で最大値 8 をとる。$x=4$ のとき，高さは 4 cm である。

したがって，三角形の面積の最大値は $8\ \mathrm{cm}^2$ で，そのときの底辺の長さと高さはともに 4 cm である。

解説

12. $y=x^2+2kx+2k+1$ を変形すると　$y=(x+k)^2-k^2+2k+1$

よって，y は $x=-k$ で最小値 $-k^2+2k+1$ をとる。

条件から　$-k^2+2k+1=2$

したがって　$k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$

よって，求める k の値は　$k=1$

解説

13. (1)　頂点が点 $(1,\ 2)$ であるから，この 2 次関数は $y=a(x-1)^2+2$ と表される。

この関数のグラフが点 $(0,\ 4)$ を通ることから　$4=a(0-1)^2+2$

よって，$4=a+2$ から　$a=2$

したがって，求める 2 次関数は　$y=2(x-1)^2+2$

(2)　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

この関数のグラフが 3 点 $(2,\ -1)$，$(0,\ 5)$，$(-1,\ 2)$ を通るから

$$\begin{cases}-1=4a+2b+c & \cdots\cdots ①\\ 5=c & \cdots\cdots ②\\ 2=a-b+c & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

② を ① に代入して整理すると　$2a+b=-3$ ……④

② を ③ に代入して整理すると　$a-b=-3$ ……⑤

④＋⑤ から　$3a=-6$　　よって　$a=-2$

これを ④ に代入して整理すると　$b=1$

したがって，求める 2 次関数は　$y=-2x^2+x+5$

(3)　軸が直線 $x=-1$ であるから，この 2 次関数は $y=a(x+1)^2+q$ と表される。

この関数のグラフが 2 点 $(-2,\ 4)$，$(1,\ 7)$ を通るから

$$\begin{cases}4=a+q & \cdots\cdots ①\\ 7=4a+q & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

②－① から　$3a=3$　　よって　$a=1$

これを ① に代入して整理すると　$q=3$

したがって，求める 2 次関数は　$y=(x+1)^2+3$

(4)　$x=2$ で最小値 -3 をとるから，この 2 次関数は $y=a(x-2)^2-3\ (a>0)$ と表される。

この関数のグラフが点 $(3,\ -1)$ を通るから　$-1=a(3-2)^2-3$

よって　$a=2$　　これは $a>0$ を満たす。

したがって，求める 2 次関数は　$y=2(x-2)^2-3$

解説

14. $-5x^2+25x\geqq 20$ を整理すると　$x^2-5x+4\leqq 0$

$x^2-5x+4=0$ を解くと　$x=1,\ 4$

よって，この 2 次不等式の解は　$1\leqq x\leqq 4$

したがって，ボールが地上から 20 m 以上の高さにあるのは，打ち上げてから 1 秒後から 4 秒後までのときである。

解説

15. 2 次関数 $y=x^2+(m-1)x+m^2-1$ の係数について

$$D=(m-1)^2-4\cdot 1\cdot(m^2-1)=-3m^2-2m+5=-(m-1)(3m+5)$$

(1)　このグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるための条件は，$D>0$ が成り立つことであるから　$-(m-1)(3m+5)>0$

すなわち　$(m-1)(3m+5)<0$　　よって　$-\frac{5}{3}<m<1$

(2)　このグラフが x 軸と共有点をもたないための条件は，$D<0$ が成り立つことであるから　$-(m-1)(3m+5)<0$

すなわち　$(m-1)(3m+5)>0$　　よって　$m<-\frac{5}{3}$，$1<m$

(3)　このグラフが x 軸と共有点をもつための条件は，$D\geqq 0$ が成り立つことであるから　$-(m-1)(3m+5)\geqq 0$

すなわち　$(m-1)(3m+5)\leqq 0$　　よって　$-\frac{5}{3}\leqq m\leqq 1$

解説

16. (1)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

$0°\leqq\theta\leqq 90°$ のとき，$\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt5}{3},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\div\frac{\sqrt5}{3}=\frac{2}{\sqrt5}$$

$90°<\theta\leqq 180°$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{5}{9}}=-\frac{\sqrt5}{3},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\div\left(-\frac{\sqrt5}{3}\right)=-\frac{2}{\sqrt5}$$

(2)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2=\frac{4}{5}$

$0°\leqq\theta\leqq 90°$ のとき，$\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt5},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt5}\div\frac{2}{\sqrt5}=\frac{1}{2}$$

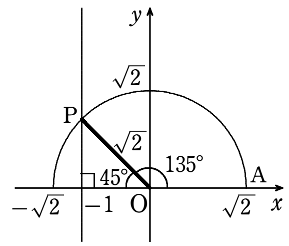
$90°<\theta\leqq 180°$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{4}{5}}=-\frac{2}{\sqrt5},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt5}\div\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)=-\frac{1}{2}$$

解説

17. (1)　$\sin\theta-1=0$ から　$\sin\theta=1$　　これを満たす θ は　$\theta=90°$

(2)　$\sqrt2\cos\theta+1=0$ から　$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt2}$

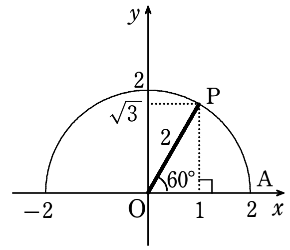


右の図の半径 $\sqrt2$ の半円上で x 座標が -1 である点 P をとる。

求める θ は　$\angle\mathrm{AOP}$

よって　$\theta=135°$

(3)　$\tan\theta-\sqrt3=0$ から　$\tan\theta=\sqrt3$



$\sqrt3=\frac{\sqrt3}{1}$ である。

右の図のように x 座標が 1，y 座標が $\sqrt3$ である点 P をとる。

求める θ は　$\angle\mathrm{AOP}$

よって　$\theta=60°$

解説

18. (1)　正弦定理から　$\frac{3}{\sin B}=2R$

よって　$\sin B=\frac{3}{2R}=\frac{3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}$

$\sin B=\frac{1}{2}$ を満たす B は　$B=30°,\ 150°$

(2)　余弦定理から　$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

よって　$3^2=(3\sqrt3)^2+a^2-2\cdot 3\sqrt3\cdot a\cos 30°$

$$9=27+a^2-6\sqrt3 a\cdot\frac{\sqrt3}{2}$$

整理すると　$a^2-9a+18=0$

これを解くと，$(a-3)(a-6)=0$ から　$a=3,\ 6$

解説

19. (1)　余弦定理から

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2^2+(\sqrt3-1)^2-2\cdot 2\cdot(\sqrt3-1)\cos 30°$$

$$=4+(4-2\sqrt3)-4(\sqrt3-1)\cdot\frac{\sqrt3}{2}=2$$

$c>0$ であるから　$c=\sqrt2$

余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt3-1)^2+(\sqrt2)^2-2^2}{2\cdot(\sqrt3-1)\cdot\sqrt2}=\frac{(4-2\sqrt3)+2-4}{2\cdot(\sqrt3-1)\cdot\sqrt2}$$

$$=\frac{2-2\sqrt3}{2\cdot(\sqrt3-1)\cdot\sqrt2}=\frac{-2(\sqrt3-1)}{2\cdot(\sqrt3-1)\cdot\sqrt2}=-\frac{1}{\sqrt2}$$

したがって　$A=135°$

よって　$B=180°-(A+C)=180°-(135°+30°)=15°$

(2)　$C=180°-(A+B)=180°-(60°+75°)=45°$

正弦定理により　$\frac{a}{\sin 60°}=\frac{6}{\sin 45°}$

よって　$a=\dfrac{6\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{1}=3\sqrt{6}$

余弦定理から　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

よって　$(3\sqrt{6})^2=b^2+6^2-2\cdot b\cdot 6\cos 60^\circ$

$$54=b^2+36-12b\cdot\frac{1}{2}$$

整理すると　$b^2-6b-18=0$　　これを解くと　$b=3\pm 3\sqrt{3}$

$b>0$ であるから　$b=3+3\sqrt{3}$

解説

20. (1)　△ABD に余弦定理を用いると

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos 120^\circ=8^2+7^2-2\cdot 8\cdot 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=169$$

BD>0 であるから　$\mathrm{BD}=\sqrt{169}=13$

(2)　$\cos\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{\mathrm{CB}^2+\mathrm{CD}^2-\mathrm{BD}^2}{2\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}}=\dfrac{10^2+9^2-13^2}{2\cdot 10\cdot 9}=\dfrac{12}{2\cdot 10\cdot 9}=\dfrac{1}{15}$

(3)　$\sin^2\angle\mathrm{BCD}=1-\cos^2\angle\mathrm{BCD}=1-\left(\dfrac{1}{15}\right)^2=\dfrac{224}{225}$

$\sin\angle\mathrm{BCD}>0$ であるから　$\sin\angle\mathrm{BCD}=\sqrt{\dfrac{224}{225}}=\dfrac{4\sqrt{14}}{15}$

したがって

$$S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9\sin\angle\mathrm{BCD}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9\cdot\frac{4\sqrt{14}}{15}=14\sqrt{3}+12\sqrt{14}$$

解説

21. データの平均値が 7 であるから　$\dfrac{1+1+4+5+9+12+14+x}{8}=7$

両辺に 8 を掛けて整理すると　$46+x=56$　　よって　$x=10$

解説

22. (1)　x のデータにおいて，第 1 四分位数 Q_1，第 3 四分位数 Q_3 はそれぞれ

$$Q_1=\frac{57+59}{2}=58,\quad Q_3=\frac{84+89}{2}=86.5$$

よって，四分位範囲は　$Q_3-Q_1=86.5-58=28.5$

四分位偏差は　$\dfrac{Q_3-Q_1}{2}=\dfrac{28.5}{2}=14.25$

y のデータにおいて，第 1 四分位数 Q_1'，第 3 四分位数 Q_3' はそれぞれ

$$Q_1'=\frac{60+66}{2}=63,\quad Q_3'=\frac{96+96}{2}=96$$

よって，四分位範囲は　$Q_3'-Q_1'=96-63=33$

四分位偏差は　$\dfrac{Q_3'-Q_1'}{2}=\dfrac{33}{2}=16.5$

(2)　(1) の結果より，y のデータの方が四分位範囲が大きいから，y の方がデータの散らばり具合が大きい。

解説

23. x および y に対する平均値は　$\overline{x}=\dfrac{50}{10}=5$，$\overline{y}=\dfrac{40}{10}=4$

番号	x	$x-\overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$
1	3	-2	4
2	5	0	0
3	8	3	9
4	1	-4	16
5	6	1	1
6	9	4	16
7	5	0	0
8	2	-3	9
9	4	-1	1
10	7	2	4
計	50		60

番号	y	$y-\overline{y}$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
1	6	2	4	-4
2	4	0	0	0
3	3	-1	1	-3
4	7	3	9	-12
5	2	-2	4	-2
6	1	-3	9	-12
7	4	0	0	0
8	5	1	1	-3
9	6	2	4	-2
10	2	-2	4	-4
計	40		36	-42

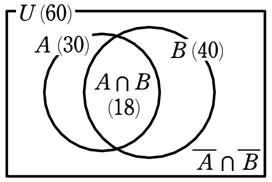
表から，相関係数 r は

$$r=\frac{-42}{\sqrt{60\times 36}}=-\frac{7}{\sqrt{60}}=-\frac{7}{2\sqrt{15}}=-\frac{7\sqrt{15}}{30}=-\frac{7\times 3.9}{30}=-0.91$$

よって，変量 x と変量 y の間には，強い負の相関があると考えられる。

解説

24. この 60 人の生徒の集合を全体集合 U とし，A を読んだ生徒の集合を A，B を読んだ生徒の集合を B とすると，$n(A)=30$，$n(B)=40$，$n(A\cap B)=18$ である。



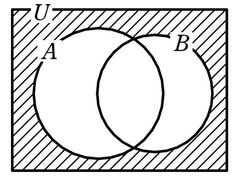
(1)　A または B を読んだ生徒の集合は $A\cup B$ である。

よって，求める人数は

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$=30+40-18=52\ (\text{人})$$

(2)　A も B も読んでいない生徒の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ すなわち $\overline{A\cup B}$ である。



$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

よって，求める人数は

$$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=60-52=8\ (\text{人})$$

解説

25. (1)　一の位は奇数であるから，その選び方は 1，3，5 の 3 通りある。

万の位の選び方は，残りの 5 個の数字から 0 を除いた 4 通りある。

千，百，十の位の選び方は，残りの 4 個の数字から 3 個を選んでできる順列の総数に等しいから，${}_4\mathrm{P}_3$ 通りある。

よって，求める奇数の個数は，積の法則により

$$3\times 4\times{}_4\mathrm{P}_3=3\times 4\times 4\cdot 3\cdot 2=288\ (\text{個})$$

(2)　一の位は偶数であるから，その選び方は 0，2，4 の 3 通りある。

万の位の数字は 0 以外であるから，その選び方は 1，2，3，4，5 の 5 通りある。

千，百，十の位の選び方は，6 個から 3 個取る重複順列の総数に等しいから，6^3 通りある。よって，求める偶数の個数は，積の法則により

$$3\times 5\times 6^3=3\times 5\times 216=3240\ (\text{個})$$

解説

26. (1)　6 個の中から A に 2 個を与える方法は　${}_6\mathrm{C}_2$ 通り

残りの 4 個から B に 2 個を与える方法は　${}_4\mathrm{C}_2$ 通り

残りの 2 個を C に与えればよい。

よって，求める分け方の総数は，積の法則により

$${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\times\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=90\ (\text{通り})$$

(2)　(1) の分け方で，A，B，C の区別のつけ方は 3! 通りある。

よって，(1) で求めた分け方で，A，B，C の区別をなくすと，同じ分け方になるものがそれぞれ 3! 通りずつある。

したがって，求める分け方の総数は　$\dfrac{90}{3!}=15$ (通り)

(3)　6 個から 4 個を選ぶ方法は　${}_6\mathrm{C}_4$ 通り

残りの 2 個を 1 個ずつ，2 組に分ける方法は 1 通りである。

よって，求める分け方の総数は，積の法則により　${}_6\mathrm{C}_4\times 1={}_6\mathrm{C}_2=\dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=15$ (通り)

解説

27. 大のさいころを投げる試行と，中のさいころを投げる試行と，小のさいころを投げる試行は独立である。

「少なくとも 1 個の目は偶数である」という事象は，「3 個の目はすべて偶数でない」，すなわち，「3 個の目はすべて奇数である」という事象の余事象である。

1 個のさいころを投げて，奇数の目が出る確率は　$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

よって，3 個の目がすべて奇数である確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

したがって，求める確率は　$1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$

解説

28. 番号札 20 枚から同時に 2 枚を引く組合せは ${}_{20}\mathrm{C}_2$ 通りある。

(1)　番号の和が奇数となるのは，引いた 2 枚の札が 1 枚は奇数で，もう 1 枚は偶数の場合である。

奇数の番号札と偶数の番号札は 10 枚ずつあるから，奇数の番号札 1 枚と偶数の番号札 1 枚を引く場合の数は　${}_{10}\mathrm{C}_1\times{}_{10}\mathrm{C}_1$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_1\times{}_{10}\mathrm{C}_1}{{}_{20}\mathrm{C}_2}=\dfrac{100}{190}=\dfrac{10}{19}$

(2)　「番号の積が偶数である」という事象は，「番号の積が偶数でない」，すなわち，「番号の積が奇数である」という事象の余事象である。

番号の積が奇数であるのは，引いた 2 枚の札がともに奇数の場合であるから，その場合の数は　${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通り

よって，番号の積が奇数である確率は　$\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_2}=\dfrac{10\cdot9}{2\cdot1}\times\dfrac{2\cdot1}{20\cdot19}=\dfrac{9}{38}$

したがって，求める確率は　$1-\dfrac{9}{38}=\dfrac{29}{38}$

解説

29. 袋 S の中から玉を取り出す試行と袋 T の中から玉を取り出す試行は独立である。

2 個の玉の色が異なる場合は，次の 2 つの事象に分かれる。

[1]　袋 S から赤玉，袋 T から白玉が出る場合

この場合の確率は　$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{6}{15}$

[2]　袋 S から白玉，袋 T から赤玉が出る場合

この場合の確率は　$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{15}$

[1]，[2] は互いに排反であるから，求める確率は　$\dfrac{6}{15}+\dfrac{2}{15}=\dfrac{8}{15}$

解説

30. 4 本目に初めて当たりを引くのは，1 本目，2 本目，3 本目がはずれ，4 本目で当たる場合であるから，その確率は　$\dfrac{5}{7}\times\dfrac{4}{6}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{7}$

解説

31. (1)　求める数を a $(0\leqq a\leqq9)$ とする。

各位の数の和　$7+a+5+1=a+13$

が 9 の倍数であるとき，この自然数は 9 の倍数になる。

$a+13$ が 9 の倍数になるのは，$a=5$ のときである。よって，求める数は　5

(2)　求める数を a $(0\leqq a\leqq9)$ とする。

各位の数の和　$5+8+a+7=a+20$

が 3 の倍数であるとき，この自然数は 3 の倍数になる。

$a+20$ が 3 の倍数になるのは，$a=1$，4，7 のときである。

よって，求める数は　1，4，7

(3)　下 2 けたの数 5□ が 4 の倍数であるとき，この自然数は 4 の倍数になる。

よって，求める数は　2，6

解説

32. 900 を素因数分解すると　$900=2^2\cdot3^2\cdot5^2$

よって，900 の正の約数の個数は　$(2+1)(2+1)(2+1)=3\cdot3\cdot3=27$（個）

また，900 の正の約数は $(1+2+2^2)(1+3+3^2)(1+5+5^2)$ を展開するとすべて現れる。

その展開式は 900 の正の約数の総和である。

したがって，正の約数の総和は　$(1+2+2^2)(1+3+3^2)(1+5+5^2)=7\cdot13\cdot31=2821$

解説

33. みかんとりんごをそれぞれ同じ数ずつ，a 人に残らないように分けるとすると

$175=a\cdot$(1 人に与えるみかんの個数)

$70=a\cdot$(1 人に与えるりんごの個数)

よって，a は 175 と 70 の公約数である。

したがって，できるだけ多くの子どもに分けるには，a を 175 と 70 の最大公約数にすればよい。

$175=5^2\cdot7$，　$70=2\cdot5\cdot7$

よって，175 と 70 の最大公約数は　$5\cdot7=35$

したがって，最大で 35 人に分けることができる。

解説

34. (1)　n が奇数のとき，$n=2k+1$（k は整数）と表される。

このとき　$n^2-4n+11=(2k+1)^2-4(2k+1)+11=(4k^2+4k+1)-8k-4+11$

$=4k^2-4k+8=4(k^2-k)+8=4k(k-1)+8$

$k(k-1)$ は連続する 2 つの整数の積で，2 の倍数であり

$k(k-1)=2l$　（l は整数）

と表すことができる。

したがって　$n^2-4n+11=4\cdot2l+8=8l+8=8(l+1)$

よって，n が奇数のとき，$n^2-4n+11$ は 8 の倍数である。

(2)　すべての整数 n は，$3k$，$3k+1$，$3k+2$（k は整数）のいずれかの形で表される。

[1]　$n=3k$ のとき

$n^2+1=(3k)^2+1=9k^2+1=3\cdot3k^2+1$

[2]　$n=3k+1$ のとき

$n^2+1=(3k+1)^2+1=(9k^2+6k+1)+1=9k^2+6k+2=3(3k^2+2k)+2$

[3]　$n=3k+2$ のとき

$n^2+1=(3k+2)^2+1=(9k^2+12k+4)+1=9k^2+12k+5=3(3k^2+4k+1)+2$

よって，n^2+1 を 3 で割ったときの余りは 1 か 2 であるから，n^2+1 は 3 の倍数でない。

解説

35. (1)　$4x-7y=1$　……①

$x=2$，$y=1$ は ① の整数解であり　$4\cdot2-7\cdot1=1$　……②

① − ② から　$4(x-2)-7(y-1)=0$　すなわち　$4(x-2)=7(y-1)$　……③

4 と 7 は互いに素であるから，$x-2$ は 7 の倍数である。

よって，整数 k を用いて $x-2=7k$ と表される。

これを ③ に代入すると　$4\cdot7k=7(y-1)$　　よって　$y-1=4k$

したがって，求める整数解は　$x=7k+2$，$y=4k+1$　（k は整数）

(2)　$7x+9y=1$　……①

$x=4$，$y=-3$ は ① の整数解であり　$7\cdot4+9\cdot(-3)=1$　……②

① − ② から　$7(x-4)+9(y+3)=0$　すなわち　$7(x-4)=-9(y+3)$　……③

7 と 9 は互いに素であるから，$x-4$ は 9 の倍数である。

よって，整数 k を用いて $x-4=9k$ と表される。

これを ③ に代入すると　$7\cdot9k=-9(y+3)$　　よって　$y+3=-7k$

したがって，求める整数解は　$x=9k+4$，$y=-7k-3$　（k は整数）

(3)　$27x+19y=1$　……①

$x=-7$，$y=10$ は ① の整数解の 1 つであり　$27\cdot(-7)+19\cdot10=1$　……②

①−② から　$27(x+7)+19(y-10)=0$　すなわち　$27(x+7)=-19(y-10)$　……③

27 と 19 は互いに素であるから，$x+7$ は 19 の倍数である。

よって，整数 k を用いて $x+7=19k$ と表される。

これを ③ に代入すると　$27\cdot19k=-19(y-10)$　　よって　$y-10=-27k$

したがって，求める整数解は　$x=19k-7$，$y=-27k+10$　（k は整数）

参考　係数 27 と 19 に互除法を適用すると

$27=19\cdot1+8$　（変形すると　$8=27-19\cdot1$）

$19=8\cdot2+3$　（変形すると　$3=19-8\cdot2$）

$8=3\cdot2+2$　（変形すると　$2=8-3\cdot2$）

$3=2\cdot1+1$　（変形すると　$1=3-2\cdot1$）

余りに着目して，この計算を逆にたどると

$1=3-2\cdot1=3-(8-3\cdot2)\cdot1=3\cdot3+8\cdot(-1)=(19-8\cdot2)\cdot3+8\cdot(-1)$

$=19\cdot3+8\cdot(-7)=19\cdot3+(27-19\cdot1)\cdot(-7)=27\cdot(-7)+19\cdot10$

よって　$27\cdot(-7)+19\cdot10=1$

したがって，$27x+19y=1$ の整数解の 1 つは　$x=-7$，$y=10$

(4)　$47x+37y=2$　……①

$x=-11$，$y=14$ は $47x+37y=1$ の整数解の 1 つであり　$47\cdot(-11)+37\cdot14=1$

両辺に 2 を掛けて　$47\cdot(-22)+37\cdot28=2$　……②

①−② から　$47(x+22)+37(y-28)=0$

すなわち　$47(x+22)=-37(y-28)$　……③

47 と 37 は互いに素であるから，$x+22$ は 37 の倍数である。

よって，整数 k を用いて $x+22=37k$ と表される。

これを ③ に代入すると　$47\cdot37k=-37(y-28)$　　よって　$y-28=-47k$

したがって，求める整数解は　$x=37k-22$，$y=-47k+28$　（k は整数）

参考　係数 47 と 37 に互除法を適用すると

$47=37\cdot1+10$　（変形すると　$10=47-37\cdot1$）

$37=10\cdot3+7$　（変形すると　$7=37-10\cdot3$）

$10=7\cdot1+3$　（変形すると　$3=10-7\cdot1$）

$7=3\cdot2+1$　（変形すると　$1=7-3\cdot2$）

余りに着目して，この計算を逆にたどると

$1=7-3\cdot2=7-(10-7\cdot1)\cdot2=7\cdot3+10\cdot(-2)=(37-10\cdot3)\cdot3+10\cdot(-2)$

$=37\cdot3+10\cdot(-11)=37\cdot3+(47-37\cdot1)\cdot(-11)=47\cdot(-11)+37\cdot14$

よって　$47\cdot(-11)+37\cdot14=1$

したがって，$47x+37y=1$ の整数解の 1 つは　$x=-11$，$y=14$

(5)　$61x+48y=5$　……①

$x=-11$，$y=14$ は $61x+48y=1$ の整数解の 1 つであり　$61\cdot(-11)+48\cdot14=1$

両辺に 5 を掛けて　$61\cdot(-55)+48\cdot 70=5$　……②

①−② から　$61(x+55)+48(y-70)=0$

すなわち　$61(x+55)=-48(y-70)$　……③

61 と 48 は互いに素であるから，$x+55$ は 48 の倍数である。

よって，整数 k を用いて $x+55=48k$ と表される。

これを ③ に代入すると　$61\cdot 48k=-48(y-70)$　　よって　$y-70=-61k$

したがって，求める整数解は　$x=48k-55$，$y=-61k+70$　（k は整数）

参考　係数 61 と 48 に互除法を適用すると

$61=48\cdot 1+13$　（変形すると　$13=61-48\cdot 1$）

$48=13\cdot 3+9$　（変形すると　$9=48-13\cdot 3$）

$13=9\cdot 1+4$　（変形すると　$4=13-9\cdot 1$）

$9=4\cdot 2+1$　（変形すると　$1=9-4\cdot 2$）

余りに着目して，この計算を逆にたどると

$1=9-4\cdot 2=9-(13-9\cdot 1)\cdot 2=9\cdot 3+13\cdot(-2)=(48-13\cdot 3)\cdot 3+13\cdot(-2)$

$=48\cdot 3+13\cdot(-11)=48\cdot 3+(61-48\cdot 1)\cdot(-11)=61\cdot(-11)+48\cdot 14$

よって　$61\cdot(-11)+48\cdot 14=1$

したがって，$61x+48y=1$ の整数解の 1 つは　$x=-11$，$y=14$

(6)　$159x+65y=2$　……①

$x=9$，$y=-22$ は $159x+65y=1$ の整数解の 1 つであり　$159\cdot 9+65\cdot(-22)=1$

両辺に 2 を掛けて　$159\cdot 18+65\cdot(-44)=2$　……②

①−② から　$159(x-18)+65(y+44)=0$

すなわち　$159(x-18)=-65(y+44)$　……③

159 と 65 は互いに素であるから，$x-18$ は 65 の倍数である。

よって，整数 k を用いて $x-18=65k$ と表される。

これを ③ に代入すると　$159\cdot 65k=-65(y+44)$　　よって　$y+44=-159k$

したがって，求める整数解は　$x=65k+18$，$y=-159k-44$　（k は整数）

参考　係数 159 と 65 に互除法を適用すると

$159=65\cdot 2+29$　（変形すると　$29=159-65\cdot 2$）

$65=29\cdot 2+7$　（変形すると　$7=65-29\cdot 2$）

$29=7\cdot 4+1$　（変形すると　$1=29-7\cdot 4$）

余りに着目して，この計算を逆にたどると

$1=29-7\cdot 4=29-(65-29\cdot 2)\cdot 4=29\cdot 9+65\cdot(-4)$

$=(159-65\cdot 2)\cdot 9+65\cdot(-4)=159\cdot 9+65\cdot(-22)$

よって　$159\cdot 9+65\cdot(-22)=1$

したがって，$159x+65y=1$ の整数解の 1 つは　$x=9$，$y=-22$

解説

36. m は整数 x，y を用いて，次のように表される。

$m=9x+3$，$m=11y+8$

よって　$9x+3=11y+8$　　すなわち　$9x-11y=5$　……①

$x=3$，$y=2$ は ① の整数解の 1 つであり　$9\cdot 3-11\cdot 2=5$　……②

① − ② から　$9(x-3)-11(y-2)=0$　　すなわち　$9(x-3)=11(y-2)$

9 と 11 は互いに素であるから，$x-3$ は 11 の倍数である。

よって，整数 k を用いて $x-3=11k$ と表される。

したがって　$x=11k+3$

これを $m=9x+3$ に代入すると　$m=9(11k+3)+3=99k+30$

$99k+30$ が最小の自然数になるのは，$k=0$ のときであるから，求める自然数は

$m=30$

解説

37. $4x-9y=1$　……①

$x=7$，$y=3$ は ① の整数解の 1 つであり　$4\cdot 7-9\cdot 3=1$　……②

① − ② から　$4(x-7)-9(y-3)=0$　　すなわち　$4(x-7)=9(y-3)$　……③

4 と 9 は互いに素であるから，$x-7$ は 9 の倍数である。

よって，整数 k を用いて $x-7=9k$ と表される。

これを ③ に代入すると　$4\cdot 9k=9(y-3)$　　よって　$y-3=4k$

したがって，① の整数解は　$x=9k+7$，$y=4k+3$　（k は整数）

$0\leqq x\leqq 50$，$0\leqq y\leqq 50$ を満たすのは $k=0$，1，2，3，4 のときであるから，求める整数の組 $(x,\ y)$ は　$(x,\ y)=(7,\ 3)$，$(16,\ 7)$，$(25,\ 11)$，$(34,\ 15)$，$(43,\ 19)$

解説

38. 消しゴムを x 個，ノートを y 冊買うとすると，次の式が成り立つ。

$70x+150y=2000$　　両辺を 10 で割って　$7x+15y=200$

変形すると　$7x=200-15y$　　すなわち　$7x=5(40-3y)$　……①

$x>0$ であるから　$5(40-3y)>0$　　したがって　$y<\dfrac{40}{3}=13.3\cdots\cdots$　……②

① において，$7x$ は 7 の倍数であるから，$5(40-3y)$ は 7 の倍数である。

これと ② を満たす自然数 y は　$y=4$，11

① から，$y=4$ のとき　$x=20$

$y=11$ のとき　$x=5$

したがって，消しゴムとノートをそれぞれ 5 個，11 冊 または 20 個，4 冊買えばよい。

別解　消しゴムを x 個，ノートを y 冊買うとすると，次の式が成り立つ。

$70x+150y=2000$　　両辺を 10 で割ると　$7x+15y=200$　……①

$x=5$，$y=11$ は，① の整数解の 1 つであり　$7\cdot 5+15\cdot 11=200$　……②

① − ② から　$7(x-5)+15(y-11)=0$

すなわち　$7(x-5)=-15(y-11)$　……③

7 と 15 は互いに素であるから，$x-5$ は 15 の倍数である。

よって，整数 k を用いて $x-5=15k$ と表される。

これを ③ に代入すると　$7\cdot 15k=-15(y-11)$　　よって　$y-11=-7k$

したがって，$70x+150y=2000$ の整数解は

$x=15k+5$，$y=-7k+11$　（k は整数）　……④

$x\geqq 1$，$y\geqq 1$ であるから　$15k+5\geqq 1$，$-7k+11\geqq 1$

これを解くと　$-\dfrac{4}{15}\leqq k\leqq\dfrac{10}{7}$　　これを満たす整数 k は　$k=0$，1

④ から，$k=0$ のとき　$(x,\ y)=(5,\ 11)$

$k=1$ のとき　$(x,\ y)=(20,\ 4)$

したがって，消しゴムとノートをそれぞれ 5 個，11 冊 または 20 個，4 冊買えばよい。

解説

39. $\dfrac{20}{37}$ を小数で表すと　$\dfrac{20}{37}=0.\dot{5}4\dot{0}$

小数第 1 位から，3 けたの数字の並び 540 がくり返される。

$100=3\cdot 33+1$ であるから，小数第 100 位の数字は 540 の 1 番目の数字で　5

解説

40. (1)　0.75 に 2 を掛け，その小数部分に 2 を掛けることをくり返すと右のようになる。

出てきた整数部分を順に並べて

$0.11_{(2)}$

$0.75\times 2=1.5$，$0.5\times 2=1.0$

(2)　1.408 の小数部分に 5 を掛け，その小数部分に 5 を掛けることをくり返すと右のようになる。

出てきた整数部分を順に並べて

$1.201_{(5)}$

$0.408\times 5=2.04$，$0.04\times 5=0.2$，$0.2\times 5=1.0$

(3)　0.9375 に 8 を掛け，その小数部分に 8 を掛けることをくり返すと右のようになる。

出てきた整数部分を順に並べて

$0.74_{(8)}$

$0.9375\times 8=7.5$，$0.5\times 8=4.0$

解説

41. I は △ABC の内心であるから　∠DBI＝∠IBC

DE∥BC であるから　∠DIB＝∠IBC

よって　∠DBI＝∠DIB

したがって，△DBI は DB＝DI の二等辺三角形である。

同様にして　EC＝EI

したがって　DE＝DI＋EI＝DB＋EC