P37 練習1

(1) 実部 -3，虚部 5　(2) 実部 $-\frac{1}{2}$，虚部 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) 実部 1，虚部 0　(4) 実部 0，虚部 -1

P37 練習2

(1) $x-3$，$x+y$ は実数であるから　$x-3=0$，$x+y=0$

これを解いて　$x=3$，$y=-3$

(2) $x-2y$，$2x-3y$ は実数であるから　$x-2y=4$，$2x-3y=7$

これを解いて　$x=2$，$y=-1$

P38 練習3

(1) $(2+3i)+(4+i)=(2+4)+(3+1)i=6+4i$

(2) $(-1+2i)+(3-4i)=(-1+3)+(2-4)i=2-2i$

(3) $(6+4i)-(3+2i)=(6-3)+(4-2)i=3+2i$

(4) $(2-3i)-(4-2i)=(2-4)+\{-3-(-2)\}i=-2-i$

P38 練習4

(1) $(1+2i)(4+3i)=4+3i+8i+6i^2=4+3i+8i+6(-1)=(4-6)+(3+8)i=-2+11i$

(2) $(2-i)(3+4i)=6+8i-3i-4i^2=6+8i-3i-4(-1)=(6+4)+(8-3)i=10+5i$

(3) $(3+4i)(3-4i)=3^2-(4i)^2=9-16i^2=9-16(-1)=25$

(4) $(2+3i)^2=4+12i+9i^2=4+12i+9(-1)=(4-9)+12i=-5+12i$

P38 練習5

(1) $2-3i$　(2) $1+i$　(3) $-\sqrt{3}i$　(4) $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

P39 練習6

(1) $\frac{1+2i}{2+3i}=\frac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{2-3i+4i-6i^2}{2^2+3^2}=\frac{8+i}{13}=\frac{8}{13}+\frac{1}{13}i$

(2) $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1^2-2i+i^2}{1^2+1^2}=\frac{-2i}{2}=-i$

(3) $\frac{5i}{2-i}=\frac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{10i+5i^2}{2^2+1^2}=\frac{-5+10i}{5}=-1+2i$

(4) $\frac{1}{i}=\frac{-i}{i\cdot(-i)}=\frac{-i}{-i^2}=\frac{-i}{-(-1)}=-i$

P40 練習7

(1) $\sqrt{-5}=\sqrt{5}i$　(2) $\sqrt{-9}=\sqrt{9}i=3i$　(3) $\pm\sqrt{-27}=\pm\sqrt{27}i=\pm3\sqrt{3}i$

P40 練習8

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{-6}=\sqrt{2}i\times\sqrt{6}i=2\sqrt{3}i^2=-2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{-6}\sqrt{3}=\sqrt{6}i\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}i$

(3) $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}}=2i$

(4) $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{2}i}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

P41 練習9

(1) $x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}\,i=\pm 2i$

(2) $x^2=-1$ より　$x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$

(3) $x^2=-\frac{1}{4}$ より　$x=\pm\sqrt{-\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}\,i=\pm\frac{1}{2}i$

P42 練習１０

(1) $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{7}\,i}{2}$

(2) $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot12}}{1}=2\pm\sqrt{-8}=2\pm2\sqrt{2}\,i$

(3) $x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot5}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm\sqrt{-15}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{15}\,i}{4}$

(4) $x=\frac{-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-1\cdot4}}{1}=\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}=\sqrt{3}\pm i$

P43 練習１１

2次方程式の判別式を D とする。

(1) $D=5^2-4\cdot1\cdot5=5>0$　よって　異なる2つの実数解

(2) $\frac{D}{4}=2^2-2\cdot3=-2<0$　よって　異なる2つの虚数解

(3) $D=1^2-4\cdot(-4)\cdot(-1)=-15<0$　よって　異なる2つの虚数解

(4) $\frac{D}{4}=(-\sqrt{3})^2-1\cdot3=0$　よって　重解

P44 練習１２

この2次方程式の判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot m=m^2-m$

(1) 2次方程式が実数解をもつのは $D\geqq0$ のときである。　よって　$m^2-m\geqq0$
左辺を因数分解して　$m(m-1)\geqq0$　これを解いて　$m\leqq0,\ 1\leqq m$

(2) 2次方程式が異なる2つの虚数解をもつのは $D<0$ のときである。　よって　$m^2-m<0$
左辺を因数分解して　$m(m-1)<0$　これを解いて　$0<m<1$

P44 練習１３

(1) この2次方程式の判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot m=4-m$

よって，2次方程式の解は次のようになる。

$D>0$　すなわち　$m<4$ のとき　異なる2つの実数解

$D=0$　すなわち　$m=4$ のとき　重解

$D<0$　すなわち　$m>4$ のとき　異なる2つの虚数解

(2) この2次方程式の判別式を D とすると　$D=m^2-4\cdot1\cdot4=m^2-16=(m+4)(m-4)$

よって，2次方程式の解は次のようになる。

$D>0$　すなわち　$m<-4,\ 4<m$ のとき　異なる2つの実数解

$D=0$　すなわち　$m=-4,\ 4$ のとき　重解

$D<0$　すなわち　$-4<m<4$ のとき　異なる2つの虚数解

P45 $\boxed{練習}$ 14

(1) $\alpha+\beta=-\dfrac{4}{3}$,　$\alpha\beta=\dfrac{2}{3}$　　(2) $\alpha+\beta=-\dfrac{-6}{1}=6$,　$\alpha\beta=\dfrac{-4}{1}=-4$

P46 $\boxed{練習}$ 15

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-1$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2(-1)=11$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-3)^3-3(-1)\cdot(-3)=-36$

$\boxed{別解}$ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)\{(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta\}=-3\{11-(-1)\}=-3\cdot12=-36$

(3) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-3)^2-4(-1)=13$

P46 $\boxed{練習}$ 16

(1) 2つの解は α, 4α と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+4\alpha=-5$, $\alpha\cdot4\alpha=m$　すなわち　$5\alpha=-5$, $4\alpha^2=m$

よって，1つの解 α は　$\alpha=-1$　このとき　$m=4\alpha^2=4(-1)^2=4$

また，他の解 4α は　$4\alpha=4(-1)=-4$　したがって　$m=4$, 2つの解は -1, -4

(2) 2つの解は α, $\dfrac{3}{2}\alpha$ と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+\dfrac{3}{2}\alpha=-5$, $\alpha\cdot\dfrac{3}{2}\alpha=m$　すなわち　$\dfrac{5}{2}\alpha=-5$, $\dfrac{3}{2}\alpha^2=m$

よって，1つの解 α は　$\alpha=-2$　このとき　$m=\dfrac{3}{2}\alpha^2=\dfrac{3}{2}(-2)^2=6$

また，他の解 $\dfrac{3}{2}\alpha$ は　$\dfrac{3}{2}\alpha=\dfrac{3}{2}(-2)=-3$　したがって　$m=6$, 2つの解は -3, -2

P47 $\boxed{練習}$ 17

(1) 2次方程式 $x^2-3x-2=0$ の解は　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$　よって　$x^2-3x-2=\left(x-\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$

(2) 2次方程式 $2x^2-2x-3=0$ の解は　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$　よって　$2x^2-2x-3=2\left(x-\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$

(3) 2次方程式 $x^2+4x+6=0$ の解は　$x=-2\pm\sqrt{2}i$　よって　$x^2+4x+6=\{x-(-2+\sqrt{2}i)\}\{x-(-2-\sqrt{2}i)\}$

$=(x+2-\sqrt{2}i)(x+2+\sqrt{2}i)$

$\boxed{別解}$ **2次方程式の解の公式や2次式の因数分解は『平方完成』が基になっている！**

(1) $x^2-3x-2=x^2-2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

$=\left(x-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$

(3) $x^2+4x+6=x^2+2\cdot2\cdot x+2^2-2^2+6=(x+2)^2+2=(x+2)^2-2\cdot(-1)=(x+2)^2-(\sqrt{2})^2i^2$

$=(x+2+\sqrt{2}i)(x+2-\sqrt{2}i)$

P48 $\boxed{\text{練習}}$ 18

(1) 解の和は $2+(-1)=1$　　解の積は $2\times(-1)=-2$

よって，この2数を解とする2次方程式の1つは　$x^2-x-2=0$

(2) 解の和は $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$　　解の積は $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=1$

よって，この2数を解とする2次方程式の1つは　$x^2-4x+1=0$

(3) 解の和は $(1+2i)+(1-2i)=2$　　解の積は $(1+2i)(1-2i)=1^2+2^2=5$

よって，この2数を解とする2次方程式の1つは　$x^2-2x+5=0$

P49 $\boxed{\text{練習1}}$

この2次方程式の2つの解を α，β とし，判別式を D とする。

方程式が条件を満たすのは，次の①，②が成り立つときである。

$D>0$ ……①　　　$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$ ……②

まず，$\dfrac{D}{4}=(m-3)^2-1\cdot 4m=m^2-10m+9$　であるから

①より　$m^2-10m+9>0$　すなわち　$(m-1)(m-9)>0$　よって　$m<1$，$9<m$　……③

次に，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-2(m-3)$，$\alpha\beta=4m$　だから

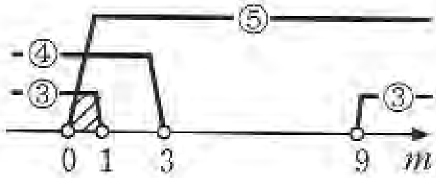
②より　$-2(m-3)>0$　かつ　$4m>0$

よって　$m<3$ ……④

$m>0$ ……⑤

③，④，⑤の共通範囲を求めて

$0<m<1$



P50　補充問題1　※虚数単位 i は，『原点を中心とする+90°の回転』と考える！

(1) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{(-1)^2-2\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2}{2^2}=\dfrac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

(2) $i+\dfrac{1}{i}=i+\dfrac{i}{i^2}=i-i=0$

(3) $i+i^2+i^3+i^4=i+i^2+i\cdot i^2+(i^2)^2=i-1-i+1=0$

P50　補充問題2

求める2数は，2次方程式　$x^2-3x+3=0$　の2つの解になっている。

これを解くと　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$　　よって，求める2数は　$\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}$，$\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}$

P50　補充問題3

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=4$　である。

すると　$(\alpha-1)+(\beta-1)=(\alpha+\beta)-2=-2-2=-4$

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=4-(-2)+1=7$

となるから，$\alpha-1$，$\beta-1$ を解とする2次方程式の1つは　$x^2+4x+7=0$　である。

P51 練習19

(1) 求める余りは $P(1)$，すなわち $P(1)=1^3+1^2-3\cdot1-2=-3$

(2) 求める余りは $P(2)$，すなわち $P(2)=2^3+2^2-3\cdot2-2=4$

(3) 求める余りは $P(-1)$，すなわち $P(-1)=(-1)^3+(-1)^2-3\cdot(-1)-2=1$

(4) 求める余りは $P(-2)$，すなわち $P(-2)=(-2)^3+(-2)^2-3\cdot(-2)-2=0$

P52 練習20

剰余の定理により $P(-1)=-5$ であるから　$2(-1)^3+5a(-1)^2+a(-1)+1=-5$

整理すると　$4a=-4$　よって　$a=-1$

P52 練習21

$P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x-3)(x+1)Q(x)+ax+b$$

この等式より　$P(3)=3a+b$，$P(-1)=-a+b$

また，$x-3$ で割った余りが1であるから　$P(3)=1$　同様に　$x+1$ で割った余りが5であるから　$P(-1)=5$

よって　$3a+b=1$，$-a+b=5$　これを解くと　$a=-1$，$b=4$　したがって，求める余りは　$-x+4$

P53 練習22

$P(x)=x^3+2x^2-5x-6$ とすると

① $P(1)=1^3+2\cdot1^2-5\cdot1-6=-8$　② $P(-1)=(-1)^3+2(-1)^2-5(-1)-6=0$

③ $P(2)=2^3+2\cdot2^2-5\cdot2-6=0$　④ $P(-2)=(-2)^3+2(-2)^2-5(-2)-6=4$

よって，整式 $P(x)$ の因数であるものは　②，③　である。

P53 練習23

(1) $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$ とすると　$P(1)=1^3-3\cdot1^2-6\cdot1+8=1-3-6+8=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

実際に割り算を行って　$x^3-3x^2-6x+8=(x-1)(x^2-2x-8)$

さらに因数分解して　$x^3-3x^2-6x+8=(x-1)(x+2)(x-4)$

(2) $P(x)=x^3-5x^2+3x+9$ とすると　$P(-1)=(-1)^3-5\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+9=-1-5-3+9=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

実際に割り算を行って　$x^3-5x^2+3x+9=(x+1)(x^2-6x+9)$

さらに因数分解して　$x^3-5x^2+3x+9=(x+1)(x-3)^2$

(3) $P(x)=2x^3+3x^2-11x-6$ とすると　$P(2)=2\cdot2^3+3\cdot2^2-11\cdot2-6=16+12-22-6=0$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

実際に割り算を行って　$2x^3+3x^2-11x-6=(x-2)(2x^2+7x+3)$

さらに因数分解して　$2x^3+3x^2-11x-6=(x-2)(2x+1)(x+3)$

P54 練習1　$(x^3-2x^2+3x-9)\div(x-3)$　　※組立除法は『神割り算』！

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -2 & 3 & -9 & \underline{3} \\
 & 3 & 3 & 18 & \\
\hline
1 & 1 & 6 & \boxed{9} &
\end{array}
$$

商 x^2+x+6，余り 9

P55 練習24

(1) 左辺を因数分解すると　$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

よって　$x-2=0$　または　$x^2+2x+4=0$

したがって　$x=2,\ -1\pm\sqrt{3}i$　**※ここは『解の公式』で求める！（以下すべて同様）**

(2) 左辺を因数分解すると　$(x+1)(x^2-x+1)=0$

よって　$x+1=0$　または　$x^2-x+1=0$

したがって　$x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

P55 練習25

(1) 27の3乗根は，3次方程式 $x^3=27$ の解である。左辺に移項すると　$x^3-27=0$

左辺を因数分解すると　$(x-3)(x^2+3x+9)=0$

よって　$x-3=0$　または　$x^2+3x+9=0$

これを解くと　$x=3,\ \dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$　したがって，27の3乗根は　$3,\ \dfrac{-3+3\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$

(2) -8 の3乗根は，3次方程式 $x^3=-8$ の解である。左辺に移項すると　$x^3+8=0$

左辺を因数分解すると　$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

よって　$x+2=0$　または　$x^2-2x+4=0$

これを解くと　$x=-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$　　したがって，-8 の3乗根は　$-2,\ 1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$

P56 練習26

(1) 左辺を因数分解すると　$(x^2-3)(x^2+4)=0$

よって　$x^2-3=0$　または　$x^2+4=0$

$x^2=3$　または　$x^2=-4$

したがって　$x=\pm\sqrt{3},\ \pm2i$

(2) 左辺を因数分解すると　$(x^2+1)(x^2-1)=0$

よって　$x^2+1=0$　または　$x^2-1=0$

$x^2=-1$　または　$x^2=1$

したがって　$x=\pm i,\ \pm1$

P56 $\boxed{\text{練習}}$２７

(1) $P(x)=x^3+4x^2+x-6$ とすると　　$P(1)=1^3+4\cdot1^2+1-6=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち　　$P(x)=(x-1)(x^2+5x+6)=(x-1)(x+2)(x+3)$

$P(x)=0$ から　　$x=1,\ -2,\ -3$

(2) $P(x)=x^3+4x^2+5x+2$ とすると　　$P(-1)=(-1)^3+4(-1)^2+5(-1)+2=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもち　　$P(x)=(x+1)(x^2+3x+2)=(x+1)^2(x+2)$

$P(x)=0$ から　　$x=-1,\ -2$

(3) $P(x)=x^3-3x^2+2$ とすると　　$P(1)=1^3-3\cdot1^2+2=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち　　$P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)$

$P(x)=0$ から　　$x-1=0$　または　$x^2-2x-2=0$　　したがって　　$x=1,\ 1\pm\sqrt{3}$

(4) $P(x)=2x^3-3x^2-4$ とすると　　$P(2)=2\cdot2^3-3\cdot2^2-4=0$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもち　　$P(x)=(x-2)(2x^2+x+2)$

$P(x)=0$ から　　$x-2=0$　または　$2x^2+x+2=0$　　したがって　　$x=2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{4}$

P57 $\boxed{\text{練習}}$２８

$1+i$ がこの方程式の解であるから　　$(1+i)^3+(1+i)^2+a(1+i)+b=0$

整理して　　$(a+b-2)+(a+4)i=0$

$a+b-2,\ -a-4$ は実数であるから　　$a+b-2=0,\ a+4=0$

これを解くと　　$a=-4,\ b=6$

このとき，もとの方程式は　$x^3+x^2-4x+6=0$　である。

左辺を因数分解すると　　$(x+3)(x^2-2x+2)=0$

したがって　　$x=-3,\ 1\pm i$

よって　$a=-4,\ b=6$　また，他の解は　-3 と $1-i$

P58　補充問題4

$P(x)$ を $3x+1$ で割った商を $Q(x)$，余りを R とすると

$P(x)=(3x+1)Q(x)+R$ （割り算の恒等式）　とおける。

この両辺に $x=-\frac{1}{3}$ を代入すると　$P\left(-\frac{1}{3}\right)=R$　が成り立つ。

よって，$P(x)$ を $3x+1$ で割った余り R は $P\left(-\frac{1}{3}\right)$ に等しい。

また，$P(x)=3x^3+x^2+x+1$ について，求める余りは

$$P\left(-\frac{1}{3}\right)=3\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)+1=-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

P58　補充問題5

(1)　$P(-1)=(-1)^3+a(-1)+b=-a+b-1$

$P(3)=3^3+a\cdot 3+b=3a+b+27$

(2)　$P(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割った余りが $3x-2$ であるから，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+3x-2$

この等式の両辺に $x=-1$, 3 を代入して

$P(-1)=3(-1)-2=-5$

$P(3)=3\cdot 3-2=7$

を得る。これと，(1) を比較して

$-a+b-1=-5$

$3a+b+27=7$

これを解いて　$a=-4$，$b=-8$

P58　補充問題6　※『方程式の解』とは方程式を成り立たせる値のこと！　『解は代入する』と記憶する

(1)　1，-1 がこの方程式の解であるから

$1^3-2\cdot 1^2+a\cdot 1+b=0$,

$(-1)^3-2(-1)^2+a(-1)+b=0$

この式を整理すると

$a+b-1=0$

$-a+b-3=0$

これを解いて　$a=-1$，$b=2$

(2)　(1) より，もとの方程式は

$x^3-2x^2-x+2=0$

となる。

左辺を因数分解すると

$(x-1)(x+1)(x-2)=0$

となる。

したがって，求める他の解は　2